

HUBUNGAN LAPANGAN PERLUASAN DAN LAPANGAN PEMISAH

Oleh. Annissa Nugrahini

NIM. 003114092

ABSTRAK

Gelanggang dengan elemen kesatuan yang setiap elemen bukan nolnya merupakan unit dan memenuhi sifat komutatif disebut lapangan. Suatu lapangan F disebut sebagai lapangan perluasan (*extension field*) dari suatu lapangan K jika K merupakan anak lapangan dari F yang disimbolkan $K \leq F$ dan operasi-operasi dalam K sama dengan operasi-operasi dalam F . Misalkan S himpunan polinomial berderajat bulat positif di dalam $K[x]$ dan K anak lapangan F , maka F dikatakan sebagai lapangan pemisah untuk S atas K , jika setiap polinomial di dalam S dapat dibebtuk menjadi faktorisasi linier dalam $F[x]$ dan F dibangkitkan oleh akar-akar dari polinomial dalam S . Jika diambil F sembarang lapangan, maka secara umum polinomial atas lapangan tersebut tidak selalu memiliki akar-akar di F , akan tetapi dapat berada pada perluasan dari lapangan F .

Misal F suatu lapangan, sedangkan $p(x)$ adalah polinomial taktereduksi dalam $F[x]$ dan $\langle p(x) \rangle = \{a \cdot p(x) \mid a \in F[x]\}$ adalah ideal dari $F[x]$ yang dibangkitkan oleh $p(x)$, maka $\frac{F[x]}{\langle p(x) \rangle} = \{a + \langle p(x) \rangle \mid a \in F[x]\}$ merupakan lapangan perluasan dari F .

Misalkan F lapangan dan $f(x)$ elemen tak konstan dari $F[x]$, maka ada lapangan pemisah E untuk $f(x)$ atas F .

Untuk membentuk suatu perluasan dari lapangan diperlukan beberapa langkah-langkah, yaitu: Dibentuk himpunan polinomial atas F dengan indeterminate x , misalkan $F[x]$, kemudian tentukan ideal maksimal dari $F[x]$ misalkan N setelah itu bentuk himpunan koset-koset dari ideal maksimal atas lapangan $F[x]$ sehingga diperoleh $\frac{F[x]}{N} = \{a + N \mid a \in F[x]\}$ yang merupakan lapangan perluasan dari F .

Langkah-langkah untuk menentukan lapangan pemisah untuk polynomial $f(x)$ atas lapangan F , yaitu: Bentuk himpunan semua polynomial atas lapangan F , misal $F[x]$, kemudian tentukan perluasan dari F , misalkan E , lalu ambil suatu polynomial non konstan dalam $E[x]$, misalkan $g(x)$, sedemikian sehingga $f(x) = (x - a_1)g(x)$ dengan a_1 adalah pembuat nol dalam $f(x)$. Cari semua pembuat nol dari $g(x)$, misalkan, $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ maka lapangan pemisah untuk $f(x)$ atas lapangan F adalah $F[a_1, a_2, \dots, a_n]$. Dari sifat-sifat tersebut diperoleh suatu hubungan antara lapangan perluasan dan lapangan pemisah, yaitu: Jika F lapangan pemisah, maka F adalah lapangan perluasan.